

УДК 519.21

І.В. АЛЕКСЕЄВА*, О.І. ЛИСЕНКО*, О.М. ТАЧИНІНА**, В.І. НОВІКОВ*

РОЗВИТОК МЕТОДУ СТОХАСТИЧНОГО ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ПРИ ПОВНІЙ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ВЕКТОР СТАНУ В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИМ РОБОТОМ

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

**Національний авіаційний інститут, м. Київ, Україна

Анотація. Інформаційно-телекомунікаційний робот (ІТР) – це кластер прецизійних мобільних механічних об'єктів (сенсорів або мультисенсорів), що виконують єдине завдання стосовно моніторингу території або її охорони чи координат розташування об'єктів пошуку. ІТР оснащені бездротовими телекомунікаційними системами та високопродуктивними малогабаритними бортовими комп'ютерами, які дозволяють використовувати хмарні технології та туманні обчислення. Групу безпілотних літальних апаратів (БПЛА), що виконують спільне завдання (наприклад, пошук потерпілих під час стихійного лиха) та оснащені взаємодіючими бездротовими телекомунікаційними системами, можливо розглядати як літаючий ІТР. Як можливу технічну реалізацію ІТР розглядають також мобільні сенсорні мережі (роботизовані сенсорні мережі та системи). З теоретичної точки зору, ці об'єкти керування можуть бути класифіковані як складені динамічні системи (СДС). У науковій літературі траєкторії складених динамічних систем називають розгалуженими. Ці траєкторії складаються з ділянок спільного руху підсистем СДС і ділянок їх індивідуального руху до цілі вздовж окремих гілок траєкторії. Аналіз фізичного змісту явищ, які супроводжують процес функціонування ІТР, а особливо мобільних, показує, що ІТР перебувають під випадковим впливом. Тому як модель функціонування ІТР слід розглядати стохастичну СДС. Для вирішення задачі оптимізації процесу керування стохастичною СДС постає завдання щодо розвитку методу стохастичного динамічного програмування при повній інформації про вектор стану ІТР. У статті описано розв'язання задачі оптимізації керування стохастичною складеною динамічною системою з довільною схемою розгалужень за умови наявності повної інформації про вектор стану.

Ключові слова: оптимальне керування стохастичними системами, складені динамічні системи, траєкторія з розгалуженням, необхідні та достатні умови оптимальності.

Abstract. The paper is focused on an information and telecommunication robot (ITR) that is a cluster of precision mobile mechanical objects (sensors or multisensors) that perform a common mission concerning either monitoring or protection of the territory or the coordinates of the search objects location. ITRs are equipped with wireless telecommunication systems and high-performance small-sized on-board computers that allow the use of cloud technologies and fog computing. A group of unmanned aerial vehicles (UAVs) that perform a common mission (such as searching for victims of natural disasters) and are equipped with interoperable wireless telecommunications systems can be considered as a flying ITR. Mobile sensor networks (robotic sensor networks and systems) are also considered as a possible technical implementation of ITR. From a theoretical point of view, these control objects can be classified as composite dynamic systems (CDS). The article also analyzes the notion of trajectories of composite dynamical systems that are called branched trajectories in the scientific literature. These trajectories consist of several sections of joint movement of CDS subsystems and some sections of their individual movement to the targets along separate branches of the trajectory. Analysis of the physical content of the phenomena that accompany the process of ITR (and especially of mobile ITR) functioning has shown that such clusters are under accidental influence. Therefore, stochastic CDS should be considered as a model of ITR functioning. To solve the problem of optimizing the process of stochastic CDS control, there arises a task of developing a meth-

od of stochastic dynamic programming with complete information about the vector of the ITR state. The article describes a solution to the problem of stochastic composite dynamic system control optimization, with an arbitrary branching scheme provided that complete information about the state vector is available.

Keywords: optimal control, stochastic systems, compound dynamic systems, branching trajectory, necessary and sufficient optimality conditions.

DOI: 10.34121/1028-9763-2020-3-60-70

1. Вступ

Адекватною моделлю функціонування ІТР в умовах дії збурюючих факторів вважаємо розривну стохастичну СДС, ефективність функціонування якої залежить від вибору моментів часу, в які відбуваються структурні перетворення СДС, а також від координат вектора стану СДС в ці моменти часу при умові оптимального керування СДС в інтервалах часу між послідовними структурними перетвореннями [1–5].

Математичні моделі розривних систем описують або звичайними диференціальними рівняннями, або стохастичними диференціальними рівняннями з кусково-неперервними правими частинами. Дослідження ознак і властивостей оптимальних рішень для розривних систем формувалося з середини минулого століття під впливом робіт Л.С. Понтрягіна, М.М. Красовського, В.А. Троїцького, В.Г. Болтянського, Р.В. Гамкрелідзе, В.І. Уткіна, А.А. Красовського. На сьогодні загальна теорія розривних систем розвинута в роботах Брайтона, Хою Ши, В.А. Боднера, Л.Т. Ащепкова, Б.Ф. Кротова, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, А.А. Асланяна, О.І. Лисенка та інших авторів. У більшості робіт задача керування такого роду системами формулювалася як задача керування детермінованими розривними системами. У стохастичній постановці при повній інформації про вектор стану розривної системи розглядалося застосування лише стохастичного принципу максимуму, який дозволяє сформулювати необхідні умови оптимальності керування розривною стохастичною СДС [6]. У дисертації [24] викладені методи оптимального керування детермінованими СДС. Робіт, які б дозволяли сформулювати необхідні та достатні умови оптимальності керування стохастичною СДС при повній інформації про вектор її стану в загальній постановці, немає [6–22].

Саме розв'язанню задачі оптимізації керування розривною стохастичною складеною динамічною системою з довільною схемою розгалужень при умові наявності повної інформації про вектор її стану присвячена ця стаття. Розв'язання задачі виконано шляхом формулювання та доведення у вигляді теореми необхідних та достатніх умов оптимальності керування розривною стохастичною СДС при повній інформації про вектор її стану.

Мета статті – розвиток методу стохастичного динамічного програмування при повній інформації про вектор стану в задачі оптимального керування інформаційно-телекомунікаційним роботом із довільною схемою розгалужень траєкторії його руху.

2. Постановка задачі

Застосуємо використані у [2–5, 19–24] поняття підсистема, блок, гілка, момент часу структурного перетворення. Розповсюдимо ці поняття на розривні стохастичні СДС, що переміщуються вздовж траєкторій із розгалуженням. Представимо розривну стохастичну СДС у вигляді розривної стохастичної СДС із змінним розміром векторів стану, керування, збурення, що діє на систему.

Математична постановка задачі пошуку оптимального керування розривною стохастичною складеною динамічною системою з повною інформацією про вектор стану системи набуває такого вигляду:

$$J(U, T, {}_1X(t_0)) = E \left\{ B_1({}_1X(t_0), t_0) + \sum_{i=1}^{N-1} [S_i({}_iX(t_i), t_i) + B_{i+1}({}_{i+1}X(t_i), t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i({}_iX, {}_iU, t) dt] + S_N({}_NX(t_N), t_N) + \int_{t_{N-1}}^{t_N} \Phi_N({}_NX, {}_NU, t) dt \right\} \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$${}_1X(t_0) \in X_0, t_i \in \theta_i (i = \overline{0, N}), t_{i-1} < t_i (i = \overline{1, N}), \bigcap_{i=0}^N \theta_i = \emptyset, \quad (2)$$

$$J_{ij}^G = E[\eta_{i+1j}({}_{i+1}\overline{X(t_i)}, t_i)] + E[G_{ij}({}_iX(t_i), t_i)] \in H_{ij}, \quad (3)$$

$$i = \overline{1, N-1}; j = \overline{1, N_{Gi}},$$

$$J_{Nj}^G = E[G_{Nj}({}_NX(t_N), t_N)] \in H_{Nj}, j = \overline{1, N_{Gi}}, \quad (4)$$

$${}_{i+1}X_j(t_i) = \Psi_{ij}({}_iX(t_i), t_i), j = \overline{1, n_{\Sigma i+1}} \quad (i = \overline{1, N-1}), \quad (5)$$

$$d_iX(t) = {}_iF({}_iX, {}_iU, t)dt + {}_iD({}_iX, {}_iU, t)d_iW(t), \quad (6)$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], {}_iX(t) \in R^{n_{\Sigma i}}, {}_iU(t) \in \Omega_i({}_iX, t) \subset R^{m_{\Sigma i}} (i = \overline{1, N}), \quad (7)$$

${}_iU(\cdot)$ – кусково-неперервне керування.

Підкреслимо, що записані вище функціонали, функції, змінні та параметри мають той самий зміст, що і в задачі, яка розглядалася в [23]. Умову (3) потрібно задавати таким чином, щоб вона не суперечила умові (5).

Позначимо $\Delta_i({}_iX, t)$ множину усіх керувань ${}_iU(\tau)$ ($t_{i-1} < t \leq \tau \leq t_i$), що задовольняють умові (7), а також таких, що забезпечують виконання умови

$$\int_{\Xi_i} p_i({}_iX, t) d_iX = 1, p_i({}_iX, t) \geq 0 \quad (i = \overline{1, N}), \quad (8)$$

$$p_1({}_1X, t)|_{t=t_0} = p_1({}_1X, t_0).$$

Керування ${}_iU({}_iX(t), t)$ називають допустимим, якщо функція ${}_iU(t) = {}_iU({}_iX(t), t), t \in [t_{i-1}, t_i]$ кусково-неперервна та ${}_iU(\tau) \in \Delta_i({}_iX, t)$. Крім того, вважається, що рівняння

$$\frac{d_iX(t)}{dt} = {}_iF({}_iX, {}_iU({}_iX, t), t)$$

при кожному фіксованому ${}_iX(t_{i-1}) = X_{t_{i-1}}$ має єдиний розв'язок на інтервалі $[t_{i-1}, t_i]$.

Мінімальне значення функціонала (1) обчислюється за формулою

$$\hat{J} = \inf_{{}_1X} \inf_{t_0 \in X_0} \inf_{t_0 \in \theta_0} \inf_{t_1 \in \theta_1} \dots \inf_{t_N \in \theta_N} \inf_{\Delta} J, \quad (9)$$

де $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \dots \times \Delta_N$.

Виконаємо перетворення виразу (9) з використанням властивості марковості процесу ${}_iX(t), t \in [t_{i-1}, t_i]$ ($i = 1, N$), а також властивостей наступних операцій: обчислення повторного математичного сподівання; обчислення мінімуму у вигляді послідовності операцій мінімізації, кожна з яких виконується на інтервалі часу $[t_i, t_N]$, який занурено в операцію мінімізації в інтервалі часу $[t_{i-1}, t_N]$ ($i = N-1, N-2, \dots, 1$) із урахуванням того факту, що керування на наступному інтервалі часу не впливає на зміну вектора стану СДС на попередньому інтервалі.

$$\begin{aligned} \hat{J} = & \inf_{{}_1X_{t_0} \in X} \inf_{t_0 \in \theta_0} \inf_{t_1 \in \theta_1} \dots \inf_{t_N \in \theta_N} \inf_{\substack{1^U \eta \in \mathcal{U}_1, \\ t_0 \leq \eta \leq t_1}} E \left| {}_1X_{t_0} \right| {}_1X_{t_0} \left[B_1({}_1X(t_0), t_0) + J_1 + \right. \\ & + \inf_{\substack{2^U \eta \in \mathcal{U}_2, \\ t_1 \leq \eta \leq t_2}} E \left| {}_2X_{t_1} \right| {}_2X_{t_1} + [J_2 + \dots + \inf_{\substack{N^U \eta \in \mathcal{U}_N, \\ t_{N-1} \leq \eta \leq t_N}} E \left| {}_NX_{t_{N-1}} \right| {}_NX_{t_{N-1}} \\ & \left. \left[S_N({}_NX(t_N), t_N) + \int_{t_{N-1}}^{t_N} \Phi_N({}_NX, {}_NU, t) dt \right] \dots \right], \end{aligned} \quad (10)$$

де $E \left| {}_iX_{t_{i-1}} \right| {}_iX_{t_{i-1}}$ – символ операції обчислення математичного сподівання, який вказує на необхідність усереднення по всіх реалізаціях ${}_iX_{t_{i-1}}^{t_i} \{ {}_iX(\eta) : t_{i-1} \leq \eta \leq t_i \}$ ($i = 1, N$) за умови, що ${}_iX(\eta) \Big|_{\eta=t_{i-1}} = {}_iX_{t_{i-1}}$ відомо і фіксовано, $\mathcal{U}_i({}_iX, t)$ – множина усіх тих значень ${}_iU \in \Omega_i({}_iX, t)$, для яких існує хоча б єдине керування ${}_iU(\cdot) \in \Delta_i({}_iX, t)$,

$$J_i = S_i({}_iX(t_i), t_i) + B_{i+1}({}_{i+1}X(t_i), t_i) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi_i({}_iX, {}_iU, t) dt.$$

Використаємо функції

$$V_N({}_NX(t_N), t; t_N) = \inf_{\substack{N^U(\eta) \in \mathcal{U}_N, \\ t \leq \eta \leq t_N, \\ t \in [t_{N-1}, t_N]}} E \left| {}_NX_{t_N} \right| {}_NX_{t_N} \left[S_N({}_NX(t_N), t_N) + \int_t^{t_N} \Phi_N({}_NX, {}_NU, \eta) d\eta \right], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} V_i({}_iX(t), t; t_i, t_{i+1}, \dots, t_N) = & \inf_{{}_iU(\eta) \in \mathcal{U}_i, t \leq \eta \leq t_i, t \in [t_{i-1}, t_i]} E \left| {}_iX_{t_i} \right| {}_iX_{t_i} \left[S_i({}_iX(t_i), t_i) + B_{i+1}({}_{i+1}X(t_i), t_i) \right. \\ & \left. + \int_t^{t_i} \Phi_i({}_iX, {}_iU, \eta) d\eta + V_{i+1}({}_{i+1}X(t), t; t_{i+1}, \dots, t_N) \right] \quad (i = N-1, N-2, \dots, 1) \end{aligned} \quad (12)$$

і отримаємо стохастичні рівняння Беллмана [11–16]:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V_i}{\partial t} = \inf_{U(t) \in \mathcal{U}_i} & \left\{ \Phi_i(X, U, t) + \left(\frac{\partial V_i}{\partial X} \right)^T F(X, U, t) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 V_i}{\partial X \partial X^T} D(X, U, t) D^T(X, U, t) \right] \right\} \quad (i = \overline{1, N})
\end{aligned} \quad (13)$$

із граничними умовами

$$\begin{aligned}
V_N(X(t_N), t_N) &= S_N(X(t_N), t_N), \\
V_i(X(t_i), t_i; t_{i+1}, \dots, t_N) &= V_{i+1}(X(t_i), t_i; t_{i+1}, \dots, t_N) + \\
&+ B_{i+1}(X(t_i), t_i) + S_i(X(t_i), t_i) \quad (i = N-1, N-2, \dots, 1).
\end{aligned} \quad (14)$$

Розв'язуємо рівняння (13) з урахуванням граничних умов (14) для фіксованих моментів $t_i (i = 0, N)$ та, починаючи з кінця траєкторії, тобто, $i = N, N-1, \dots, 1$, знаходимо, що

$$\hat{J} = \inf_{X_0 \in X} \inf_{t_0 \in \theta_0} \inf_{t_1 \in \theta_1} \dots \inf_{t_N \in \theta_N} \inf_{U(\eta) \in \mathcal{U}_1(X, t), t_0 \leq \eta \leq t_1} \left[B_1(X(t_0), t_0) + V_1(X(t_0), t_0; t_1, t_2, \dots, t_N) \right]_{X_{t_0}}. \quad (15)$$

З урахуванням вище викладеного, формулюємо остаточний результат.

Теорема 1. Нехай існує скалярна функція $V_i(X(t), t; t_i, \dots, t_N), t \in [t_{i-1}, t_i]$, від якої можливо обчислити неперервні частинні похідні $\frac{\partial V_i}{\partial t}, \frac{\partial V_i}{\partial X}, \frac{\partial^2 V_i}{\partial X \partial X^T}$. Допустимі керування $\hat{U}_i(X, t), t \in [t_{i-1}, t_i] (i = \overline{1, N})$, вектор $\hat{T} = (\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_N)$, початкова точка процесу $\hat{X}(t_0)$, які задовольняють рівнянням Беллмана (13), граничним умовам (14) та умові (15). Тоді керування $\hat{U}_i(X, t), t \in [t_{i-1}, t_i] (i = \overline{1, N})$, вектор $\hat{T}$, початкова точка $\hat{X}(t_0)$ є оптимальними.

3. Розвиток методу стохастичного динамічного програмування

З теореми 1 випливає перший наслідок, який стосується розвитку методу стохастичного динамічного програмування для стохастичної СДС із схемою розгалуження траєкторії, яка складається з центральної гілки та бокових гілок, і при цьому підсистеми після відокремлення між собою не взаємодіють.

Розв'язок цієї задачі безпосередньо випливає з теореми 1.

Постановка задачі:

$$J = E \left\{ \sum_{i=1}^k \left[J + \sum_{j=1}^{r_i} J_{ij} \right] \right\} \rightarrow \inf, \quad (16)$$

$${}_1x(t_0) \in X_0, t_q \in \theta_q (q = i, ij) \quad t_{i-1} < t_i < t_{ij}, \theta_{i-1} \cap \theta_i = \theta_i \cap \theta_{ij} = \emptyset$$

$$(i = 1, k; j = 1, r_i), \quad (17)$$

$$d_q x(t) = {}_q f({}_q x(t), {}_q u({}_q x(t), t), t) dt +$$

$$+ {}_q \sigma({}_q x(t), {}_q u({}_q x(t), t), t) d_q W(t), \quad t \in [t_{q^*}, t_q], \quad (18)$$

$${}_q x(t) \in R^n, {}_q u(t) \in \Omega_q \subset R^{m_q}$$

$$(q = i, q^* = i - 1; q = ij; q^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}), \quad (19)$$

${}_q u(\cdot)$ – кусково-неперервно,

$${}_i x(t_i) = {}_{i+1} x(t_i) = {}_{ij} x(t_i) \quad i = \overline{1, k-1}; j = \overline{1, r_i}, \quad {}_k x(t_k) = {}_{kj} x(t_k) \quad (j = \overline{1, r_k}). \quad (20)$$

У виразі (16) позначено

$$J_q = S_q({}_q x(t_q), t_q) + \int_{t_{q^*}}^{t_q} \Phi({}_q x, {}_q u, t) dt. \quad (21)$$

$(q = i, q^* = i - 1; q = ij, q^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i})$, ${}_q f({}_q x, {}_q u, t)$ – n -вимірний векторна функція; ${}_q \sigma({}_q x, {}_q u, t)$ – матрична функція розміру $n \times \nu_q$; ${}_q W(t)$ – ν_q -вимірний вінерівський процес із коваріацією прирістів $I_q dt$ (I_q – одинична матриця розміру $\nu_q \times \nu_q$). Керування ${}_q u({}_q x(t), t)$ називають допустимим, якщо функція ${}_q u(t) = {}_q u({}_q x(t), t)$ – кусково-неперервна і приймає значення із множини Ω_q і при цьому рівняння

$$\frac{d_q x}{dt} = {}_q f({}_q x, {}_q u({}_q x, t), t)$$

при кожному фіксованому ${}_q x(t_{q^*}) = {}_q x^*$ має єдиний розв’язок на інтервалі $[t_{q^*}, t_q]$ ($q = i, q^* = i - 1; q = ij, q^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$).

Розв’язок поставленої задачі сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 2. Нехай існують скалярні функції

$$V_{ij}({}_{ij} x(t), t; t_{ij}), t \in [t_i, t_{ij}] (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}),$$

$V_i({}_i x(t), t; t_i, t_{i1}, \dots, t_{ir_i}; t_{i+1}, t_{i+11}, \dots, t_{i+1r_{i+1}}; \dots; t_k, t_{k1}, \dots, t_{kr_k}), t \in [t_{k-1}, t_k]$, від яких можливо обчислити неперервні частинні похідні $\frac{\partial V_q}{\partial t}, \frac{\partial V_q}{\partial {}_q x}, \frac{\partial^2 V_q}{\partial {}_q x \partial {}_q x^T}$ ($q = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$), допустиме керування ${}_q u({}_q x(t), t)$, $t \in [t_{q^*}, t_q]$ ($q = i, q^* = i - 1; q = ij, q^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$), вектор $T = (t_0, t_1, t_{11}, \dots, t_{1r_1}; t_2, t_{21}, \dots, t_{2r_2}; \dots; t_k, t_{k1}, \dots, t_{kr_k})$, початкова точка ${}_1 x(t_0)$, що задовольняють стохастичним рівнянням Беллмана:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V_q}{\partial t} = \inf_{q, u(t) \in \Omega_q} & \left\{ \Phi_q(x, u, t) + \frac{\partial^T V_q}{\partial_q x} f_q(x, u, t) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\frac{\partial^2 V_q}{\partial_q x \partial_q^T x} \sigma_q(x, u, t) \sigma_q^T(x, u, t) \right] \right\},
\end{aligned} \quad (22)$$

які пов'язані між собою рекуррентними граничними умовами:

$$\begin{aligned}
V_q(x(t_q), t_q) &= S_q(x(t_q), t_q) + \xi(q) \sum_{j=1}^{r_i} V_{ij}(x(t_i), t_i) + \\
&+ \xi(q) V_{i+1}(x(t_i), t_i, t_{i1}, \dots, t_{ir_i}; t_k, t_{k1}, \dots, t_{kr_k}), \\
(q = ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}; q = i, i = \overline{k}, j = \overline{1, r_k}, \\
q = k-1, j = \overline{1, r_{k-1}}; \dots; i = 1, j = \overline{1, r_1}), \\
\xi(q) &= \begin{cases} 1, q = i (i = \overline{1, k}), \\ 0, q = ij (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}); \end{cases} \\
\xi(q) &= \begin{cases} 1, q = i (i = \overline{1, k-1}), \\ 0, q = k, ij (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}) \end{cases}
\end{aligned} \quad (23)$$

із урахуванням умови (20) та умови

$$\begin{aligned}
\hat{J} = \inf_{x(t_0) \in X_0} \inf_{t_0 \in \theta_0} \inf_{t_1 \in \theta_1} \inf_{t_{11} \in \theta_{11}} \dots \inf_{t_{r_1} \in \theta_{r_1}} \inf_{t_{2r_2} \in \theta_{2r_2}} \dots \inf_{t_k \in \theta_k} \inf_{t_{k1} \in \theta_{k1}} \dots \\
\dots \inf_{t_{kr_k} \in \theta_{kr_k}} V_1(x(t_0), t_0; t_1, t_{11}, \dots, t_{1r_1}; t_2, t_{21}, \dots, t_{2r_2}; \dots; t_k, t_{k1}, \dots, t_{kr_k}).
\end{aligned} \quad (24)$$

Тоді керування $u_q(x(t), t)$, $t \in [t_{q*}, t_q]$ ($q = i, q^* = i-1; q = ij, q^* = i; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$),

вектор $\hat{T}$, початкова точка $\hat{x}(t_0)$ є оптимальними.

Рекомендації стосовно процедури пошуку розв'язку задачі стохастичної оптимізації керування СДС у постановці (16)–(20) із використанням теореми 2 полягають у такому. Для фіксованих моментів часу $t_q \in \theta_q$ ($q = 0, i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$) виконується пошук розв'язку рівняння (22) з виконанням граничних умов (20), (23). При цьому спочатку розв'язуються рівняння, що відповідають боковим гілкам траєкторії СДС, тобто для $q = ij, i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$. Після цього, починаючи з кінця траєкторії, розв'язується рівняння (22), що відповідає центральній гілці розгалуженої траєкторії. У підсумку отримуємо, що $V_1 = V_1(x(t_0), t_0, t_1, t_{11}, \dots, t_{1r_1}; \dots; t_k, t_{k1}, \dots, t_{kr_k})$, тобто V_1 залежить від $x(t_0), t_0, t_q$ ($q = i, ij; i = \overline{1, k}; j = \overline{1, r_i}$) як від параметрів, оптимальні значення яких обчислюються згідно з (24).

З теореми 1 випливає другий наслідок, який стосується розвитку методу стохастичного динамічного програмування для стохастичної СДС із урахуванням взаємодії підсистем.

Як приклад розглянемо математичну постановку задачі у вигляді

$$J(U, T, {}_1x(t_0)) = E \left[B_1({}_1x(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_1({}_1x, {}_1u, t) dt + \right. \\ \left. + B_2({}_{21}x(t_1), {}_{22}x(t_1), t_1) + S_1({}_1x(t_1), t_1) + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} \Phi_2({}_{21}x, {}_{22}x, {}_{21}u, {}_{22}u, t) dt + B_3({}_3x(t_2), t_2) + \right. \quad (25)$$

$$\left. + S_2({}_{21}x(t_2), {}_{22}x(t_2), t_2) + \int_{t_2}^{t_3} \Phi_3({}_3x, {}_3u, t) dt + S_3({}_3x(t_3), t_3) \right] \rightarrow \inf,$$

$${}_1x(t_0) \in X_0, t_i \in \theta_i (i = 0, 1, 2, 3), \theta_{i-1} \cap \theta_i = \emptyset, t_0 < t_1 < t_2 < t_3, \quad (26)$$

$${}_{21}x_j(t_1) = \psi_{1j}({}_1x(t_1), t_1), {}_3x_j(t_2) = \psi_{2j}({}_{21}x(t_2), {}_{22}x(t_2), t_2) \\ (i = 1, 2; j = 1, N), \quad (27)$$

$$d_{{}_i}x(t) = {}_if({}_ix, {}_iu, t)dt + {}_i\sigma({}_ix, {}_iu, t)d_{{}_i}W(t), \quad (28)$$

$${}_ix(t) \in R^n, {}_iu(t) \in \Omega_i \subset R^{m_i}, {}_iu(\cdot) - \text{кусково-неперервно, } t \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, 3,$$

$$d_{{}_{2i}}x(t) = {}_{2i}f({}_{2i}x, {}_{2i}u, t)dt + {}_{2i}\sigma({}_{2i}x, {}_{2i}u, t)d_{{}_{2i}}W(t), \quad (29)$$

$${}_{2i}x(t) \in R^n, {}_{2i}u(t) \in \Omega_{2i} \subset R^{m_{2i}}, {}_{2i}u(\cdot) - \text{кусково-неперервно, } t \in [t_1, t_2], i = 1, 2.$$

Задача (25)–(29) є окремим випадком задачі (1)–(7). Розв'язок задачі (25)–(29) дає така теорема.

Теорема 3. Припустимо, що існують скалярні функції $V_3({}_3x(t), t; t_3), t \in [t_2, t_3], V_2({}_{21}x(t), {}_{22}x(t), t; t_2, t_3), t \in [t_1, t_2], V_1({}_1x(t), t; t_1, t_2, t_3), t \in [t_0, t_1]$, від яких можливо обчислити неперервні частинні похідні $\frac{\partial V_i}{\partial t} (i = 1, 2, 3), \frac{\partial V_i}{\partial {}_ix} (i = 1, 3), \frac{\partial V_2}{\partial {}_{2i}x} (i = 1, 2), \frac{\partial^2 V_i}{\partial {}_ix \partial {}_i^T x} (i = 1, 3), \frac{\partial^2 V_2}{\partial {}_{2i}x \partial {}_{2i}^T x} (i = 1, 2)$, допустимі керування ${}_iu({}_ix(t), t) (i = 1, 3), {}_{2i}u({}_{21}x, {}_{22}x, t) (i = 1, 2)$, вектор $T = (t_0, t_1, t_2, t_3)$, початкову точку ${}_1x(t_0)$, що задовольняють стохастичним рівнянням Беллмана:

$$-\frac{\partial V_i}{\partial t} = \inf_{{}_iu(t) \in \Omega_i} \left\{ \Phi_i({}_ix, {}_iu, t) + \frac{\partial^T V_i}{\partial {}_ix} {}_if({}_ix, {}_iu, t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} tr \left[\frac{\partial^2 V_i}{\partial {}_ix \partial {}_i^T x} {}_i\sigma({}_ix, {}_iu, t) {}_i\sigma^T({}_ix, {}_iu, t) \right] \right\}, (i = 1, 3), \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V_2}{\partial t} = & \inf_{2i, u(t) \in \Omega_{2i} (i=1,2)} \left\{ \Phi_2(21x, 22x, 21u, 22u, t) + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\partial^T V_i}{\partial_{2i} x} 2i f(2i x, 2i u, t) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} tr \left[\frac{\partial^2 V_i}{\partial_{2i} x \partial_{2i}^T x} 2i \sigma(2i x, 2i u, t) 2i \sigma^T(2i x, 2i u, t) \right] \right] \right\}, \quad (31)
\end{aligned}$$

які пов'язані граничними умовами

$$V_3(3x(t), t_3; t_3) = S_3(3x(t), t_3), \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
V_2(21x(t_2), 22x(t_2), t_2; t_2, t_3) = & S_2(21x(t_2), 22x(t_2), t_2) + \\
& + B_3(3x(t_2), t_2) + V_3(3x(t_2), t_2; t_3), \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_1(1x(t_1), t; t_1, t_2, t_3) = & S_1(1x(t_1), t_1) + \\
& + B_2(21x(t_1), 22x(t_1), t_1) + V_2(21x(t_1), 22x(t_1), t_1; t_2, t_3) \quad (34)
\end{aligned}$$

із урахуванням умови (27) та умови

$$\hat{J} = \inf_{1x(t_0) \in X_0} \inf_{t_0 \in \theta_0} \inf_{t_1 \in \theta_1} \inf_{t_2 \in \theta_2} \inf_{t_3 \in \theta_3} V_1(1x(t_0), t_0; t_1, t_2, t_3). \quad (35)$$

Тоді управління $\hat{u}_i(x, t)$ ($i = 1, 3$), $\hat{u}_{2i}(21x, 22x, t)$ ($i = 1, 2$), вектор $\hat{T}$, початкова точка $\hat{1}x \begin{pmatrix} \hat{t}_0 \end{pmatrix}$ є оптимальними.

4. Висновки

1. Задача щодо оптимізації керування стохастичною складеною динамічною системою при повній інформації про вектор її стану з довільною схемою розгалужень траєкторії може бути розв'язана з використанням сформульованих у статті у вигляді теорем і доведених необхідних та достатніх умов оптимальності.

2. Процедура застосування доведених теорем для розв'язання задач оптимального керування інформаційно-телекомунікаційними роботами складається з таких дій: переходу від стохастичної СДС, що пересувається по траєкторії з довільною схемою розгалужень, до розривної стохастичної системи із змінними розмірностями (мається на увазі кількість компонент вектора, а не його фізична розмірність) векторів стану, керування, збурення, повернення до вихідної схеми розгалужень із розмірностями векторів стану, керування, збурення, які відповідають моделям руху підсистем (блоків) ІТР (СДС) по окремих гілках траєкторії.

Для оптимізації керування стохастичною СДС при повній інформації про вектор її стану, яка пересувається по траєкторії, схема розгалужень якої має центральну та бічні гілки і при цьому відсутня взаємодія підсистем після розділення, доцільно використовувати умови теореми 2. Ці умови сформульовано у термінах вихідної постановки задачі про оптимізацію керування стохастичною складеною динамічною системою і тому являють собою умови, повністю підготовлені для розробки на їх основі обчислювального алгоритму.

3. Результатом розв'язання задачі оптимізації керування стохастичною СДС при повній інформації про вектор її стану є аналітична або алгоритмічна залежність вектора керування

кожною підсистемою (блоком) СДС від часу або від часу та поточного значення вектора стану, а також оптимальні значення моментів часу структурних перетворень СДС.

4. Необхідні та достатні умови оптимальності, які розроблено у статті, доцільно використовувати для пошуку оптимального керування ІТР, що перебуває під дією стохастичних збурень (наприклад, політ у турбулентній атмосфері) в умовах, коли можливо знехтувати помилками бортових вимірювачів параметрів руху ІТР.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Романченко І.С., Лисенко О.І., Чумаченко С.М., Данилюк С.Л., Новіков В.І., Тачиніна О.М., Кірчу П.І., Валуйський С.В. Моделі застосування інформаційно-телекомунікаційних технологій на основі безпілотних авіаційних комплексів у надзвичайних ситуаціях. К.: НАУ, 2016. 332 с. ISBN 978-966-932-011-7.
2. Lysenko O., Tachinina O. Method of path constructing of information robot on the basis of unmanned aerial vehicle. *Proc. of the National Aviation University*. К.: НАУ, 2017. N 4 (73). P. 60–68.
3. Lysenko O., Tachinina O., Alekseeva I.V. Algorithm of Optimal Control of UAV Group. *Electronics and control systems*. 2018. № 2 (56). P. 114–119.
4. Тачиніна Е.Н., Лысенко А.И., Чумаченко С.М. Условия оптимальности траектории движения носителя при размещении сенсоров в зоне чрезвычайной ситуации. *Техническая механика*. 2016. № 3. С. 87–93.
5. Тачиніна Е.Н., Лысенко А.И. Метод размещения сенсоров в зоне чрезвычайной ситуации на базе технологии составных динамических систем. *Сборник научных трудов SWorld*. 2014. Вып. 3 (36). Т. 1. С. 84–89.
6. Боднер В.А., Роднищев Н.Е., Юриков Е.П. Оптимизация терминальных стохастических систем. М.: Машиностроение, 1987. 208 с.
7. Репнікова Н.Д. Теорія автоматичного керування: класика і сучасність: підручник. К.: НТУУ «КПІ», 2011. 328 с.
8. Каргин А.А. Введение в интеллектуальные машины. Книга 1: Интеллектуальные регуляторы. Донецк: Норд Пресс., Дон. НУ, 2010. 526 с.
9. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления / пер. с англ. Б.И. Копылова. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 832 с.
10. Гудвин Г.К., Гребен С.Ф., Сильгадо М.Э. Проектирование систем управления. М.: Бином. Лаборатория базовых знаний, 2004. 911 с.
11. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов Е.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1989. 447 с.
12. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 552 с.
13. Росин М.Ф., Булыгин В.С. Статистическая динамика и теория эффективности систем управления. М.: Машиностроение, 1980. 312 с.
14. Казаков И.Е., Гладков Д.И. Методы оптимизации стохастических систем. М.: Наука, 1987. 304 с.
15. Каллианпур Г. Стохастическая теория фильтрации. М.: Наука, 1987. 320 с.
16. Корольюк В.С. Стохастические модели систем. Киев: Наукова думка, 1989. 208 с.
17. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985. 560 с.
18. Розенберг Г.С. Достаточные условия оптимальности динамических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями. *Автоматика и телемеханика*. 1970. № 12. С. 59–68.
19. Лысенко А.И. Линейная квадратичная гауссовская задача оптимизации управления составной динамической системой. *Техническая кибернетика*. Киев: Высшая школа, 1983. Вып. 12. С. 84–90.
20. Лысенко А.И. Стохастическая оптимизация управления составной динамической системой при неполной информации о состоянии. *Адаптивные системы автоматического управления*. 1989. Вып. 17. С. 50–55.
21. Лысенко А.И. Оценивание вектора состояния и управления траекторией динамической системы. Автоматизация управления полетом. М.: Изд-во МАИ, 1989. С. 32–36.

22. Лысенко А.И. Стохастическая оптимизация ветвящейся траектории движения составной динамической системы. Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. Киев: Институт математики АН УССР, 1989. С. 87–93.
23. Alekseeva I.V., Lysenko O.I., Tachinina O.M. Necessary optimality conditions control of stochastic compound dynamic system in case of full information about state vector. *Математичні машини і системи*. 2020. N 4. P. 136–147.
24. Тачиніна О.М. Методи синтезу оптимального керування детермінованими складеними динамічними системами із розгалуженими траєкторіями руху: дис. ... д-ра техн. наук. К.: НАУ, 2018. 307 с. URL: <https://nau.edu.ua/site/variables/news/2018/12/disert%20Tachinina.pdf>.

Стаття надійшла до редакції 23.06.2021