

УДК 519.21

І.В. АЛЕКСЄЄВА*, О.І. ЛИСЕНКО*, І.О. СУШИН*

**СТОХАСТИЧНІ ДОСТАТНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ КЕРУВАННЯ
РУХОМ ГРУПИ ЛІТАЮЧИХ ІНФОРМАЦІЙНО-ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ
РОБОТІВ ПРИ ПОВНІЙ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ВЕКТОР ЇХ СТАНУ**

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
м. Київ, Україна

Анотація. Задачу оптимального керування рухом групи літаючих інформаційно-телекомунікаційних роботів (ЛІТР), які перебувають під впливом стохастичних збурень, розв'язано завдяки формулюванню та доведенню теореми про стохастичні достатні умови оптимальності. Під час доведення теореми реальний технічний об'єкт керування, тобто групу ЛІТР, розглядали як складену динамічну систему (СДС). При доведенні стохастичних достатніх умов оптимальності припускалося, що всі компоненти вектора стану стохастичної СДС вимірюються, причому вимірювання є абсолютно точними. Особливістю розглянутої у статті постановки задачі оптимального керування складеною динамічною системою є те, що не накладалося обмежень на рух складових елементів (блоків) цієї системи. Такий рух СДС прийнято вважати рухом елементів (блоків) СДС уздовж траєкторій із довільною схемою розгалужень. Саме такий рух і є особливістю руху стохастичного рою. Важливим прикладним теоретичним досягненням доведених у статті достатніх умов оптимальності керування стохастичним роєм інформаційно-телекомунікаційних роботів (стохастичною складеною динамічною системою) є формулювання процедури, яка дозволяє розв'язати задачу оптимального керування рухом стохастичного рою за будь-яких структурних перетворень цього рою. Процедура передбачає застосування підходу, що базується на припущенні про зміну розмірності вектора стану стохастичної складеної динамічної системи та вектора керування цією системою в моменти її структурних перетворень. Підкреслимо, що в моменти структурних перетворень змінюється також розмірність векторів, які характеризують вплив зовнішніх збурень на ЛІТР. Після стохастичної оптимізації керування «консолідованим» на даному часовому інтервалі складеним об'єктом відбувається повернення до керування кожним окремим із консолідованих ЛІТР. Тобто відбувається перехід до форми представлення розв'язку задачі стохастичної оптимізації керування стохастичним рухом рою у вигляді, готовому для програмування в бортовому комп'ютері (мікропроцесорі) окремого ЛІТР. У статті продемонстровано теоретичну можливість попереднього або оперативного синтезу індивідуального оптимального керування кожним ЛІТР в умовах стохастичного впливу на нього.

Ключові слова: безпроводові сенсорні мережі, мобільні сенсори, стохастична складена динамічна система, стохастичні достатні умови оптимальності керування, літаючі інформаційно-телекомунікаційні роботи.

Abstract. The problem of optimal motion control for a group of flying information and telecommunication robots (FITRs) operating under stochastic disturbances has been solved by formulating and proving a theorem on stochastic sufficient optimality conditions. In the proof of the theorem, the real control object, namely the FITR group, has been modeled as a composite dynamic system (CDS). In deriving the stochastic sufficient conditions for optimality, it has been assumed that all components of the stochastic CDS state vector are available for measurement and that the measurements are error-free. A distinctive feature of the

problem statement considered in the paper is that no constraints are imposed on the motion of the constituent elements (blocks) of the system. Such CDS motion is commonly interpreted as the movement of its elements (blocks) along trajectories with arbitrary branching, which is characteristic of a stochastic swarm. An important applied theoretical contribution of the sufficient optimality conditions for controlling a stochastic swarm of information and telecommunication robots (a stochastic composite dynamic system) proved in the article is the formulation of a procedure that enables the solution of the optimal control problem for the motion of a stochastic swarm under arbitrary structural transformations of the swarm. The procedure is based on the assumption that the dimensionality of the state vector and the control vector of the stochastic composite dynamic system changes at the moments of structural transformations. It should be emphasized that at these moments, the dimensionality of the vectors describing the influence of external disturbances on the FITR also changes. After stochastic optimization of the control of the “consolidated” composite object over a given time interval, control is returned to each individual FITR within the consolidated group. Thus, the solution is represented in a form suitable for implementation on an onboard computer (microprocessor) of the individual FITR. The paper demonstrates the theoretical possibility of offline or online synthesis of individual optimal control for each FITR under stochastic disturbances.

Keywords: wireless sensor networks, mobile sensors, stochastic composite dynamic system, stochastic sufficient optimality conditions for control, flying information and telecommunication robots.

DOI: 10.34121/1028-9763-2026-3-13

1. Вступ

Літаючий інформаційно-телекомунікаційний робот (ЛІТР) — це безпілотний літальний апарат (БПЛА), який призначений для виконання інформаційно-телекомунікаційних операцій.

Залежно від складу бортового обладнання ЛІТР може виконувати функції літаючого мультисенсора, накопичувача інформації, ретранслятора, мобільного дата-центру «туманних обчислень» або контролера. Крім того, ЛІТР забезпечує підтримку інформаційної взаємодії центру керування зі стаціонарними та мобільними абонентами.

Найбільш успішно ЛІТР використовується разом із безпроводовими сенсорними мережами (БСМ) як стаціонарними БСМ (СБСМ), так і мобільними БСМ (МБСМ) [1–32].

МБСМ є надзвичайно ефективними в умовах стохастичної невизначеності, тобто в умовах відсутньої або зруйнованої наземної інфраструктури (регіони зі складним рельєфом місцевості та (або) регіони, що зазнали впливу природного стихійного лиха або техногенної катастрофи) [1–18]. Зазвичай МБСМ оперативно розгортаються для організації оперативної взаємодії особового складу пошуково-рятувальних підрозділів та (або) служби підтримки правопорядку. МБСМ — це безпроводові сенсорні локальні мережі, в яких вузли мають однаковий статус (однорангові) і можуть безпосередньо взаємодіяти між собою в зоні радіовидимості або з ретрансляцією повідомлень через інші вузли, тобто утворюють стрибкоподібні мережі довільної структури [26–32].

Слід зазначити, що мобільність вузлів, непередбачуваність оперативного ландшафту, обмеження на енергетичні можливості вузлів (обмежена енергетика радіоліній) призводять до нестабільності з'єднань між вузлами і, як наслідок, до втрати зв'язності в МБСМ. Тобто неперервна зв'язність може бути забезпечена лише в межах окремих кластерів [6–8, 11, 13, 20–32].

Таку зв'язність назовемо кластерною зв'язністю МБСМ. З фізичної точки зору, кластерна зв'язність МБСМ означає можливість встановлення зв'язку між максимальною кількістю мобільних сенсорів цієї мережі протягом часу, достатнього для передачі необхідного обсягу інформації із заданою якістю до мобільного сенсора, обраного головним (накопичувачем інформації).

Кластерна зв'язність МБСМ є функцією часу, яка може бути випадковою [8], оскільки її втрата відбувається як унаслідок детермінованих, так і випадкових процесів, пов'язаних із переміщенням мобільних сенсорів або нестачею електроенергії на їх борту для передачі необхідного обсягу інформації із заданою якістю. Як накопичувач інформації в кластері можна використовувати або один МС (зосереджений накопичувач), або декілька (групу) МС

(розподілений накопичувач). При цьому вибір як зосередженого, так і розподіленого накопичувача інформації залежить від запасу електричної енергії на борту МС та технічних характеристик пристрою запам'ятовування інформації на борту МС. Варто зазначити, що накопичувач інформації, зібраної мобільними сенсорами, може бути віртуальним. Віртуальний накопичувач — це умовна точка у просторі, до якої мобільні сенсори можуть передати інформацію безпосередньо або через інші сенсори цього кластера МБСМ.

Наявність інформації в накопичувачі ще не означає, що вона може бути передана до центру керування для обробки та прийняття рішення. У складних (стохастичних) інформаційно-телекомунікаційних умовах надзвичайних ситуацій, де планується використання МБСМ [18], виникає задача пошуку оптимального керування рухом групи ЛІТР, яку розглядають як стохастичну складену динамічну систему (СДС) [2, 4, 5, 10, 14–16].

2. Постановка задачі

Дамо пояснення фізичного змісту дій щодо збору інформації з мобільних сенсорів (МС) за допомогою групи ЛІТР: переміщення групи ЛІТР із вихідного просторового положення до точок у просторі, в яких відбувається безпосередній збір інформації з кластерів (точки зчитування); збір інформації у точках зчитування; ретрансляція (доставка) інформації до центру керування. Вважаємо, що зчитування інформації з кластерів відбувається з використанням технології 5G. Тоді часом зчитування інформації з кластерів можна знехтувати порівняно з часом механічного руху групи ЛІТР.

Вважаємо, що МБСМ функціонує за сценарієм, відомим як «квазімобільність» [18]. Це означає, що мобільні сенсори працюють у двох режимах: перший — «переміщення у просторі», коли сенсор пересувається в зоні моніторингу та виконує пошук інформації; другий — «завмирання», коли сенсор за централізованою командою або за програмою у визначені моменти часу зупиняється для передачі зібраної інформації на борт ЛІТР.

Згідно зі сценарієм «квазімобільності», відбувається таке: у режимі «рух» інформаційного обміну між МС та ЛІТР немає; у режимі «завмирання» інформаційний обмін між МС та ЛІТР є. Особливо підкреслено, що у режимі «завмирання» у центрі керування послідовно виконуються обчислення за трьома алгоритмами:

1) алгоритм навігації обчислює просторову топологію МБСМ за інформацією від МС, які працюють як радіомаяки (ЛІТР виконують спеціальні маневри (баражують) або «зависають» у повітрі і збирають інформацію з радіомаяків МС і передають її до центру керування);

2) алгоритм кластеризації виконує необхідні розрахунки щодо кластеризації МБСМ на основі використання результатів навігаційних розрахунків. Алгоритм кластеризації визначає координати тих точок простору (просторові області), в які повинні переміститися ЛІТР для збору інформації з кластерів МС;

3) алгоритм маршрутизації за заданим критерієм та результатами розрахунків за пунктом 2 виконує обчислення оптимально узгоджених траєкторій руху групи ЛІТР від їх поточного положення до точок збору інформації.

Наразі існують ефективні алгоритми навігації та кластеризації для МБСМ, проте відсутній алгоритм маршрутизації, який би за заданим критерієм та на основі результатів навігації й кластеризації обчислював оптимально узгоджені траєкторії руху групи ЛІТР від поточного положення до точок збору інформації в умовах стохастичної невизначеності, характерної для функціонування МБСМ у зоні надзвичайної ситуації.

Метою даної статті є розробка стохастичних достатніх умов оптимальності керування рухом групи літаючих інформаційно-телекомунікаційних роботів за повної інформації про вектори їхнього стану на основі використання стохастичної функції Кротова В.Ф. Структурною моделлю функціонування групи ЛІТР можна вважати складену динамічну систему [2, 4, 5, 10, 14–16].

Складену динамічну систему (СДС), що пересувається у загальному випадку по траєкторії з довільною схемою розгалужень, перетворюємо до виду розривної стохастичної системи зі змінним розміром векторів стану, управління та збурення за методикою [4, 10]. За допомогою модифікованого методу Кротова В.Ф. отримаємо умови оптимальності у загальній задачі оптимізації керування розривною стохастичною складеною динамічною системою.

У підходах та позначеннях, використаних у [10, 16], сформулюємо загальну задачу стохастичного оптимального синтезу, коли керування СДС на кожній ділянці траєкторії будемо шукати у вигляді ${}_i U({}_i X, t)$:

$$J = \sum_{i=1}^N \left\{ E[S_i({}_i X, t_i)] + E[\eta_i({}_i X, t_{i-1})] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} E[\Phi_i({}_i X, {}_i U, t_i)] dt \right\} \rightarrow \inf; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N \left\{ E[\chi_{ij}({}_i X, t_{i-1})] + E[G_{ij}({}_i X, t_{i-1})] \right\} \in \Delta_j \quad (j = \overline{1, N_G}); \quad (2)$$

$$E[Q_{ij}({}_i X, {}_i U, t)] \in \Lambda_{ij} \quad (i = \overline{1, N}; j = \overline{1, N_{Q_i}}); \quad (3)$$

$$\bigcap_{j=1}^{N_G} \Delta_j \neq \emptyset, \bigcap_{j=1}^{N_{Q_i}} \Lambda_{ij} \neq \emptyset;$$

$$\begin{aligned} d {}_i X &= {}_i F({}_i X, {}_i U, t) dt + {}_i B({}_i X, {}_i U, t) d {}_i W(t), \\ t &\in [t_{i-1}, t_i] \quad (i = \overline{1, N}); \end{aligned} \quad (4)$$

$${}_{i+1} X_j(t_i) = \Psi_{ij}({}_i X(t_i), t_i) \quad (i = \overline{1, N-1}; j = \overline{1, n_{\Sigma_{i+1}}}), \quad (5)$$

де $E[\cdot]$ — операція обчислення математичного сподівання, ${}_1 X(t_0) = {}_1 X_0$ — випадкова величина із заданою щільністю ймовірності $p_1({}_1 X, t_0)$, ${}_i X(t) \in R^{m_{\Sigma_i}}$, ${}_i U({}_i X, t) \in \Omega_i({}_i X, t)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Omega_i({}_i X, t)$ — задана множина, ${}_i U \in R^{m_{\Sigma_i}}$, ${}_i U({}_i X, t)$ — керування, кусково-неперервне по t та неперервне, неперервно-диференційоване по

$${}_i X, i = \overline{1, N}. \quad (6)$$

Отже, поставлена задача мінімізувати функціонал (1) на множині пар функцій $\{ {}_i U({}_i X, t), p_i({}_i X, t) \} \quad (i = \overline{1, N})$, визначених у циліндрі $\Xi_i \times [t_{i-1}, t_i] \quad (i = \overline{1, N})$, де Ξ_i — нескінченна область в n_{Σ_i} — вимірному евклідовому просторі, і моментів часу $t_0, t_i, t_{i-1} < t_i \quad (i = \overline{1, N})$, $t \in \theta_i \quad (i = \overline{0, N})$, $\theta_{i-1} \cap \theta_i = \emptyset \quad (i = \overline{1, N})$.

3. Розв'язок загальної задачі стохастичного оптимального синтезу

Функції ${}_i U({}_i X, t), p_i({}_i X, t)$ зв'язані рівняннями [10 (11)]. Функції $p_i({}_i X, t)$ задовольняють умовам (2), (3) із виконанням співвідношення (5), а також із врахуванням того, що в початковий момент часу $t = t_0$ задана щільність імовірності $p_1({}_1 X, t_0)$ така, що

$$p_1({}_1X, t_0) \geq 0, \int_{\Xi_1} p_1({}_1X, t_0) d_1X = 1. \quad (7)$$

Нагадаємо, що для розв'язків рівняння [10 (11)] за прийнятих у задачі [10 (5)–(9)] обмежень на коефіцієнти умови

$$p_i({}_iX, t) \geq 0, \int_{\Xi_i} p_i({}_iX, t) d_iX \equiv 1 \quad (8)$$

виконуються автоматично для всіх $t \in [t_{i-1}, t_i]$, якщо вони виконуються при $t = t_{i-1}$. Множину функцій $\{p_i({}_iX, t)\} (i = \overline{1, N})$, що задовольняють (2), (3), (8), позначимо $\rho_i({}_iX, t) (i = \overline{1, N})$. Множину пар функцій $\left\{{}_iU \in \Omega_i({}_iX, t); p_i \in \rho_i({}_iX, t)\right\} (i = \overline{1, N})$, зв'язаних рівнянням [10 (11)] на $[t_{i-1}, t_i]$ із початковими умовами $p_i({}_iX, t_{i-1})$, позначимо D_i .

Будемо вважати, що функціонал J на множині $D_\theta = \theta_0 \times \theta_1 \times \dots \times \theta_N \times D_1 \times D_2 \times \dots \times D_N$ обмежений знизу, тобто $\inf_{D_\theta} J = J > -\infty$.

Тоді існує мінімізуюча послідовність $\left\{{}_i\hat{U}^l({}_iX, t); {}_i\hat{p}^l({}_iX, t); t_0^l, t_i^l; i = \overline{1, N}\right\} \subset D_\theta$ така, що $J({}_i\hat{U}^l, {}_i\hat{p}^l, t_0^l, t_i^l; i = \overline{1, N}) \rightarrow \hat{J}$ при $l \rightarrow \infty$. Розглянемо дійсні скалярні функції $\varphi_i({}_iX, t) (i = \overline{1, N})$, які є неперервними разом зі своїми першими та другими похідними за всіма компонентами вектора ${}_iX$ і першої похідної за t . Тоді стохастичний диференціал Іто випадкового процесу може бути записаний так:

$$\begin{aligned} d\varphi_i({}_iX(t), t) = & \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial^T \varphi_i}{\partial {}_iX} F({}_iX(t), U, t) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\frac{\partial}{\partial {}_iX} \frac{\partial^T}{\partial {}_iX} \varphi_i({}_iX, t) \right) {}_iB({}_iX, U, t) {}_iB^T({}_iX, U, t) \right] \Bigg\} dt + \\ & + \frac{\partial^T \varphi_i({}_iX, t)}{\partial {}_iX} {}_iB({}_iX, U, t) d_iW(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Значення критерію (1) не змінюється, якщо функціям, що стоять під знаком математичного сподівання та інтегралу за часом в інтервалі, додати і відняти стохастичний диференціал процесу:

$$\begin{aligned} J = & \sum_{i=1}^N \left\{ E[S_i({}_iX, t_i)] + E[\eta_i({}_iX, t_{i-1})] + \right. \\ & + \int_{t_{i-1}}^{t_i} E[\Phi_i({}_iX, {}_iU, t_i) dt + d\varphi_i({}_iX(t), t)] - \int_{t_{i-1}}^{t_i} E[d\varphi_i({}_iX(t), t)] \Bigg\} = \\ = & E[h_{\varphi 1}^S({}_1X, t_0)] + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ E[h_{\varphi i}^S({}_iX, t_i)] + E[h_{\varphi i+1}^S({}_{i+1}X, t_{i+1})] + \right. \\ & + \int_{t_{i-1}}^{t_i} E[H_i({}_iX, {}_iU, t)] dt \Bigg\} + E[h_{\varphi N}^S({}_NX, t_N)] + \int_{t_{i-1}}^{t_i} E[H_N({}_NX, {}_NU, t)] dt, \end{aligned} \quad (10)$$

де враховано, що

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} E \left[d\varphi_i \left({}_i X(t), t \right) \right] = E \left[\varphi_i \left({}_i X(t_i), t_i \right) \right] - E \left[\varphi_i \left({}_i X(t_{i-1}), t_{i-1} \right) \right], \left(i = \overline{1, N} \right); \quad (11)$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} E \left[\frac{\partial^T \varphi_i \left({}_i X, t \right)}{\partial {}_i X} {}_i B \left({}_i X, {}_i U, t \right) d {}_i W(t) \right] = 0 \left(i = \overline{1, N} \right), \quad (12)$$

а також використано позначення

$$h_{\varphi_{i+1}}^\eta \left({}_{i+1} X, t_i \right) = \eta_{i+1} \left({}_{i+1} X, t_i \right) + \varphi_{i+1} \left({}_{i+1} X, t_i \right) \left(i = \overline{1, N-1} \right); \quad (13)$$

$$h_{\varphi_i}^S \left({}_i X, t_i \right) = S_i \left({}_i X, t_i \right) + \varphi_i \left({}_i X, t_i \right) \left(i = \overline{1, N} \right); \quad (14)$$

$$\begin{aligned} H_i \left({}_i X, {}_i U, t \right) &= \Phi_i \left({}_i X, {}_i U, t \right) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial^T \varphi_i}{\partial {}_i X} F \left({}_i X, {}_i U, t \right) + \\ &+ \frac{1}{2} tr \left[\left(\frac{\partial}{\partial {}_i X} \frac{\partial^T}{\partial {}_i X} \varphi_i \left({}_i X, t \right) \right) {}_i B \left({}_i X, {}_i U, t \right) {}_i B^T \left({}_i X, {}_i U, t \right) \right], \left(i = \overline{1, N} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Виконаємо мінімізацію виразу (10) на множині D_θ із використанням методу інваріантного занурення операцій мінімізації:

$$\begin{aligned} \hat{J} = & \inf_{\substack{t_0 \in \theta_0, \dots, t_N \in \theta_N \\ p_i({}_i X, t) \in \rho_i({}_i X, t), t=t_i, t_{i-1} \left(i=\overline{1, N} \right)}} \left\{ \int_{\Xi_1} h_{\varphi_1}^S \left({}_1 X, t_0 \right) p_1 \left({}_1 X, t_0 \right) d {}_1 X + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \left[\int_{\Xi_i} h_{\varphi_i}^S \left({}_i X, t_i \right) p_i \left({}_i X, t_i \right) d {}_i X + \int_{\Xi_{i+1}} h_{\varphi_{i+1}}^\eta \left({}_{i+1} X, t_i \right) p_{i+1} \left({}_{i+1} X, t_i \right) d {}_{i+1} X + \right. \\ & + \int_{\Xi_N} h_{\varphi_N}^S \left({}_N X, t_N \right) p_N \left({}_N X, t_N \right) d {}_N X + \inf_{D_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Xi_1} H_1 \left({}_1 X, {}_1 U, t \right) p_1 \left({}_1 X, t \right) d {}_1 X dt + \right. \\ & + \inf_{D_2} \left[\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Xi_2} H_2 \left({}_2 X, {}_2 U, t \right) p_2 \left({}_2 X, t \right) d {}_2 X dt + \dots + \right. \\ & \left. \left. \left. + \inf_{D_N} \left[\int_{t_{N-1}}^{t_N} \int_{\Xi_N} H_N \left({}_N X, {}_N U, t \right) p_N \left({}_N X, t \right) d {}_N X dt \right] \dots \right] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Із врахуванням того, що

$$\inf_{D_i} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \int_{\Xi_i} H_i \left({}_i X, {}_i U, t \right) p_i \left({}_i X, t \right) d {}_i X dt \right] = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\inf_{\substack{U \in \Omega_i({}_i X, t), \\ p_i \in \rho_i({}_i X, t)}} \int_{\Xi_i} H_i \left({}_i X, {}_i U, t \right) p_i \left({}_i X, t \right) d {}_i X \right] dt,$$

оберемо $\varphi_i \left({}_i X, t \right)$ у такий спосіб, щоб

$$\inf_{\substack{U \in \Omega_i({}_i X, t), \\ p_i \in \rho_i({}_i X, t)}} \int_{\Xi_i} H_i \left({}_i X, {}_i U, t \right) p_i \left({}_i X, t \right) d {}_i X = 0,$$

починаючи з $i = N$ і далі у порядку зменшення $i = N - 1, N - 2, \dots, 1$.

У результаті отримаємо, що $\hat{J} = \hat{\mu}_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \hat{\mu}_i + \hat{\mu}_N$,

$$\text{де} \quad \hat{\mu}_0 = \inf_{t_0 \in \theta_0, p_1({}_1X, t_0) \in \rho_1({}_1X, t_0)} \int_{\Xi_1} h_{\varphi 1}^S({}_1X, t_0) p_1({}_1X, t_0) d_1X;$$

$$\hat{\mu}_i = \inf_{\substack{t_i \in \theta_i, p_i({}_iX, t_i) \in \rho_i({}_iX, t_i), \\ p_{i+1}({}_{i+1}X, t_i) \in \rho_{i+1}({}_{i+1}X, t_i)}} \left[\int_{\Xi_i} h_{\varphi i}^S({}_iX, t_i) p_i({}_iX, t_i) d_iX + \int_{\Xi_{i+1}} h_{\varphi i+1}^\eta({}_{i+1}X, t_i) p_{i+1}({}_{i+1}X, t_i) d_{i+1}X \right];$$

$$\hat{\mu}_N = \inf_{t_N \in \theta_N, p_N({}_NX, t_N) \in \rho_N({}_NX, t_N)} \int_{\Xi_N} h_{\varphi N}^S({}_NX, t_N) p_N({}_NX, t_N) d_NX.$$

Наступна теорема дає достатні умови абсолютного мінімуму функціонала (1) в задачі (1)–(6).

Теорема. Припустимо, що існує послідовність $\{\hat{\nu}^l\} = \left\{ {}_i\hat{U}^l, \hat{p}_i^l, \hat{t}_0^l, \hat{t}_i^l \left(i = \overline{1, N} \right) \right\} \in D_\theta$.

Для того, щоб ця послідовність мінімізувала функціонал J на D_θ , достатньо існування функцій $\varphi_i({}_iX(t), t)$, як-то:

1) при $t \in (\hat{t}_{i-1}^l, \hat{t}_i^l), i = 1, N$

$$\begin{aligned} & \int_{\Xi_i} H_i({}_iX, {}_i\hat{U}^l, t) \hat{p}_i^l({}_iX, t) d_iX \rightarrow \\ & \rightarrow \inf_{\substack{{}_iU \in \Omega({}_iX, t), \\ p_i \in \rho_i({}_iX, t)}} \int_{\Xi_i} H_i({}_iX, {}_iU, t) p_i({}_iX, t) dt = \hat{H}_i(t) = 0, l \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (16)$$

2) при $t = \hat{t}_i, (i = \overline{0, N})$

$$\int_{\Xi_1} h_{\varphi 1}^\eta({}_1X, \hat{t}_0^l) \hat{p}_1^l({}_1X, \hat{t}_0^l) d_1X \rightarrow \hat{\mu}_0, l \rightarrow \infty (i = 0); \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Xi_i} h_{\varphi i}^S({}_iX, \hat{t}_i^l) \hat{p}_i^l({}_iX, \hat{t}_i^l) d_iX + \int_{\Xi_{i+1}} h_{\varphi i+1}^\eta({}_{i+1}X, \hat{t}_i^l) \times \\ & \times \hat{p}_{i+1}^l({}_{i+1}X, \hat{t}_i^l) d_{i+1}X \rightarrow \hat{\mu}_i, l \rightarrow \infty (i = \overline{1, N-1}); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\int_{\Xi_N} h_{\varphi N}^S({}_NX, \hat{t}_N^l) \hat{p}_N^l({}_NX, \hat{t}_N^l) d_NX \rightarrow \hat{\mu}_N, l \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Доведення. Нехай функції $\varphi_i({}_iX(t), t) (i = \overline{0, N})$ існують і вдалося підібрати послідовність $\{\hat{\nu}^l\}$, що задовольняє умовам (16)–(19). Припустимо, що мінімум функціонала (1) досягається на послідовності $\{\tilde{\nu}^l\} = \left\{ {}_i\tilde{U}^l, \tilde{p}_i^l, \tilde{t}_0^l, \tilde{t}_i^l; (i = \overline{1, N}) \right\}$, що не задовольняє умовам (16)–(19). У цьому випадку

$$\hat{J} - \tilde{J} \geq 0, \quad (20)$$

де $\hat{J} = \lim_{l \rightarrow \infty} J(\tilde{\nu}^l)$, $\tilde{J} = \lim_{l \rightarrow \infty} J(\tilde{\nu}^l)$.

Із використанням виразу (10) можемо записати

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Xi_1} h_{\varphi 1}^s({}_1 X, \tilde{t}_0^l) \tilde{p}_1^l({}_1 X, \tilde{t}_0^l) d_1 X + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\int_{\Xi_i} h_{\varphi i}^s({}_i X, \tilde{t}_i^l) \tilde{p}_i^l({}_i X, \tilde{t}_i^l) d_i X + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_{\Xi_{i+1}} h_{\varphi i+1}^\eta({}_{i+1} X, \tilde{t}_i^l) \tilde{p}_{i+1}^l({}_{i+1} X, \tilde{t}_i^l) d_{i+1} X \right] + \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tilde{t}_{i-1}^l}^{\tilde{t}_i^l} \int_{\Xi_i} H_i({}_i X, {}_i \tilde{U}^l, t) \tilde{p}_i^l({}_i X, t) d_i X dt \right\} + \\ & + \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\int_{\Xi_N} h_{\varphi N}^s({}_N X, \tilde{t}_N^l) \tilde{p}_N^l({}_N X, \tilde{t}_N^l) d_N X + \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tilde{t}_{N-1}^l}^{\tilde{t}_N^l} \int_{\Xi_N} H_N({}_N X, {}_N U, t) \tilde{p}_N^l({}_N X, t) d_N X dt. \right. \end{aligned} \quad (21)$$

Спираючись на використання вихідного припущення про те, що умови (16)–(19) для послідовності $\{\tilde{\nu}^l\}$ не виконуються, можемо записати

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Xi_1} h_{\varphi 1}^s({}_1 X, \tilde{t}_0^l) \tilde{p}_1^l({}_1 X, \tilde{t}_0^l) d_1 X \geq \hat{\mu}_0; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\int_{\Xi_i} h_{\varphi i}^s({}_i X, \tilde{t}_i^l) \tilde{p}_i^l({}_i X, \tilde{t}_i^l) d_i X + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Xi_{i+1}} h_{\varphi i+1}^\eta({}_{i+1} X, \tilde{t}_i^l) \tilde{p}_{i+1}^l({}_{i+1} X, \tilde{t}_i^l) d_{i+1} X \right] \right\} \geq \hat{\mu}_i \left(i = \overline{1, N-1} \right); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Xi_N} h_{\varphi N}^s({}_N X, \tilde{t}_N^l) \tilde{p}_N^l({}_N X, \tilde{t}_N^l) d_N X \geq \hat{\mu}_N; \quad (24)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tilde{t}_{i-1}^l}^{\tilde{t}_i^l} \int_{\Xi_i} H_i({}_i X, {}_i \tilde{U}^l, t) \tilde{p}_i^l({}_i X, t) d_i X dt \geq 0 \left(i = \overline{1, N} \right). \quad (25)$$

Нерівності (22)–(25) дозволяють записати вираз

$$\tilde{J} \geq \hat{\mu}_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \hat{\mu}_i + \hat{\mu}_N = \hat{J}. \quad (26)$$

Але співвідношення (26) вступає в суперечність із вихідним припущенням про справедливність нерівності (20), що спростовує твердження про існування послідовності $\{\tilde{\nu}^l\}$. Теорема доведена.

4. Висновок

1. Група (рій) літаючих роботів, яка отримала у статті назву літаючих інформаційно-телекомунікаційних роботів (ЛІТР), у узагальненому розумінні може вважатися складеною динамічною системою. Розглянуто такий рух ЛІТР, який можна вважати випадковим просторовим переміщенням або під керуючою випадковою дією, або внаслідок зовнішнього випадкового збурення. Така складена динамічна система вважається стохастичною складеною динамічною системою. Саме для стохастичної складеної динамічної системи в статті доведено

теорему про достатні умови керування такою системою за умови, що кожна компонента вектора стану цієї системи вимірюється і при цьому вимірюється абсолютно точно. Траєкторія стохастичного руху рою є стохастичною траєкторією з довільною схемою розгалуження. Теорему доведено для стохастичної динамічної системи, яка пересувається за стохастичною траєкторією з довільною схемою розгалужень. Саме цей факт є суттєвим внеском у розвиток теорії оптимального керування стохастичними розривними системами.

2. Важливим прикладним теоретичним досягненням доведених у статті достатніх умов оптимальності керування стохастичним роєм інформаційно-телекомунікаційних роботів (стохастичною складеною динамічною системою) є формулювання процедури (методики), яка дозволяє розв'язати задачу оптимального керування рухом стохастичного рою за будь-яких структурних перетворень цього рою. Процедура (методика) передбачає застосування підходу, що базується на припущенні про зміну розмірності вектора стану стохастичної складеної динамічної системи та вектора керування цією системою в моменти часу її структурних перетворень. Моменти часу структурних перетворень — це моменти часу, коли за фізичним змістом задачі доцільно розглядати рух окремих ЛІТР як консолідований рух, тобто рух деякого абстрактного окремого об'єкта із загальною розмірністю його вектора стану, що дорівнює сумарній розмірності векторів стану консолідованих складових (окремих ЛІТР). Підкреслимо, що в моменти часу структурних перетворень також відбувається зміна розмірності векторів, які характеризують вплив зовнішніх збурень на ЛІТР. Зрозуміло, що, говорячи про розмірність, мається на увазі кількість компонент вектора, а не фізична розмірність цих компонент. Після стохастичної оптимізації керування «консолідованим» на даному часовому інтервалі складеним об'єктом відбувається повернення до керування кожним окремим із консолідованих ЛІТР. Тобто відбувається перехід до форми представлення розв'язку задачі стохастичної оптимізації керування стохастичним рухом рою (як стохастичної складеної динамічної системи) у вигляді, готовому для програмування.

3. Особливо підкреслимо, що вектор керування кожним стохастичним ЛІТР може бути представлений як у вигляді залежності його компонент від часу, так і у вигляді залежності від фазових координат. Крім того, можна визначити оптимальні моменти часу структурних перетворень (перегрупувань) усередині стохастичної складеної системи (рою).

4. Зручність наведеної у статті методики структурних перетворень стохастичної складеної динамічної системи в поєднанні з доведеними у статті умовами оптимальності керування цією системою дозволяє реалізувати не тільки попередній синтез закону керування, але й адаптивне керування стохастичною складеною динамічною системою. Тобто існує можливість оптимально керувати в реальному часі стохастичним роєм ЛІТР, якщо скористатися наведеними у статті достатніми умовами стохастичного оптимального керування.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Романченко І.С., Лисенко О.І., Чумаченко С.М., Данилюк С.Л., Новіков В.І., Тачиніна О.М., Кірчу П.І., Валуїський С.В. Моделі застосування інформаційно-телекомунікаційних технологій на основі безпілотних авіаційних комплексів у надзвичайних ситуаціях. Київ: НАУ, 2016. 332 с. ISBN 978-966-932-011-7.
2. Lysenko O., Tachinina O., Alekseeva I., Kyselov V. Algorithm of operative synthesis of information robot branching path. *Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Developments: Proc. of the 5th International Conference* (Kyiv, October 22–24, 2019). Kyiv: NAU, 2019. P. 234–237.
3. Lysenko O., Romaniuk V., Tachinina O., Valuiskyi S. The problems of control in wireless sensor and mobile ad-hoc networks. *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering*. Cham: Springer, 2020. P. 385–404. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-37618-5_33.
4. Lysenko O., Tachinina O. Methods for the synthesis of optimal control of deterministic compound dynamical systems with branches. *Handbook of Research on Artificial Intelligence Applications in the Aviation and Aerospace Industries*. Hershey: IGI Global, 2020. P. 323–351. DOI: <https://doi.org/10.4018/978-1-7998-1415-3.ch014>.

5. Lysenko O., Tachinina O. Algorithms of controlling an information robot created based on unmanned aerial vehicles. *Proc. of the National Aviation University*. 2020. N 2 (83). P. 13–19. DOI: <https://doi.org/10.18372/2306-1472.83.14629>.
6. Romaniuk V., Lysenko O., Romaniuk A., Zhuk O. Increasing the efficiency of data gathering in clustered wireless sensor networks using UAV. *Information and Telecommunication Sciences*. 2020. Vol. 11, N 1. P. 102–107. DOI: <https://doi.org/10.20535/2411-2976.12020.102-107>.
7. Romaniuk A.V., Romaniuk V.A., Sparavalo M.K., Lysenko O.I., Zhuk O.V. Synthesis of data collection methods by telecommunication aerial platforms in wireless sensor networks. *Information and Telecommunication Sciences*. 2020. Vol. 11, N 2. P. 66–73.
8. Новіков В.І., Лисенко О.І., Валуйський С.В., Гуйда О.Г. Математичні моделі, методи та алгоритми оптимізації показників функціонування безпроводових сенсорних мереж. *Вчені записки ТНУ*. 2020. Т. 31 (70), № 3. С. 54–64.
9. Лисенко О.І., Романюк В.А., Гуйда О.Г., Дворська С.В., Осинський А.К. Концептуальний підхід до забезпечення функціональної живучості безпроводової сенсорної мережі. *Вчені записки ТНУ*. 2021. Т. 32 (71), № 1. С. 10–16.
10. Alekseeva I.V., Lysenko O.I., Tachinina O.M. Necessary optimality conditions of control of stochastic compound dynamic system in case of full information about state vector. *Mathematical machines and systems*. 2020. N 4. С. 136–147.
11. Uryvsky L., Lysenko O., Novikov V., Osypchuk S. Control methods research of indicators for intelligent adaptive flying information-telecommunication platforms in mobile wireless sensor networks. *Lecture Notes in Electrical Engineering*. 2022. Vol. 831. P. 444–467. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-92435-5_25.
12. Lysenko O., Romaniuk V., Sushyn I., Novikov V. The improvement direct method for collecting monitoring data from the wireless sensor network nodes. *UkrMiCo'2021*. Kyiv, 2021. P. 123–126.
13. Романюк В.А., Лисенко О.І., Романюк А.В., Новіков В.І., Гуйда О.Г. Метод збору інформації з вузлів безпроводової сенсорної мережі. *Вчені записки ТНУ*. 2021. Т. 32 (71), № 2. С. 25–35.
14. Лисенко О.І., Тачиніна О.М., Новіков В.І., Гуйда О.Г., Сушин І.О. Теоретичні основи конструювання керування рухом. *Вчені записки ТНУ*. 2021. Т. 32 (71), № 3. С. 55–62.
15. Лисенко О.І., Тачиніна О.М., Кисельов В.Б., Новіков В.І., Гуйда О.Г., Сушин І.О. Метод розміщення сенсорів. *Вчені записки ТНУ*. 2021. Т. 32 (71), № 4. С. 53–59.
16. Алексеева І.В., Лисенко О.І., Тачиніна О.М., Новіков В.І. Розвиток методу стохастичного динамічного програмування. *Математичні машини і системи*. 2021. № 3. С. 60–70.
17. Romaniuk V., Lysenko O., Novikov V., Sushyn I. Development of methods of positioning. *Information and Telecommunication Sciences*. 2021. N 2. P. 40–49. DOI: <https://doi.org/10.20535/2411-2976.22021.40-49>.
18. Lysenko O., Tachinina O., Novikov V., Alekseeva I., Chumachenko S., Tureichuk A.. Expert-modeling decision support system. *Security Forum*. 2021. P. 249–258.
19. Tachinina O.M., Lysenko O. I., Alekseeva I.V., Novikov V. I. Mathematical modeling of motion. *CEUR Workshop Proc.* 2020. Vol. 2711. P. 482–491.
20. Sun Z., Wang P., Vuran M.C., Al-Rodhaan M.A., Al-Dhelaan A.M., Akyildiz I.F. BorderSense: border patrol through advanced wireless sensor networks. *Ad Hoc Networks*. 2011. Vol. 9. P. 468–477. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.adhoc.2010.08.001>.
21. Lorincz K. et al. Sensor networks for emergency response. *IEEE Pervasive Computing*. 2004. Vol. 3, N 4. P. 16–23. DOI: <https://doi.org/10.1109/MPRV.2004.1269134>.
22. Ramesh M.V., Kumar S., Rangan P.V. Wireless sensor network for landslide detection. *ICWN*. 2009. P. 1–7.
23. Okcu H., Soyuturk M. Distributed clustering approach. *International Journal of Ad Hoc and Ubiquitous Computing*. 2014. Vol. 15, N 1–3. P. 106–120.
24. Ducrocq T., Hauspie M., Mitton N. Balancing energy consumption. *ISRN Sensor Networks*. 2013. Article ID 314732. P. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/314732>.
25. Sarkar A., Murugan T. Routing protocols. *Alexandria Engineering Journal*. 2016. Vol. 55, N 4. P. 3173–3183. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aej.2016.08.003>.
26. Popescu D., Stoican F., Stamatescu G., Chenaru O., Ichim L. A survey of collaborative UAV–WSN systems. *Sensors*. 2019. Vol. 19, N 21. Article 4690. DOI: <https://doi.org/10.3390/s19214690>.

27. Qin Z. et al. Completion time minimization. *Sensors*. 2019. Vol. 19, N 18. Article 4032. DOI: <https://doi.org/10.3390/s19184032>.
28. Liu B., Zhu H. Energy-effective data gathering. *Sensors*. 2019. Vol. 19, N 11. Article 2506. DOI: <https://doi.org/10.3390/s19112506>.
29. Alfattani S., Jaafar W., Yanikomeroglu H., Yongacoglu A. Multi-UAV data collection framework. *IEEE GLOBECOM*. 2019. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/GLOBECOM38437.2019.9013271>.
30. Cao H.-R., Yang Z., Yue X.-J., Liu Y.-X.. An optimization method. *International Journal of Distributed Sensor Networks*. 2017. Vol. 13, N 4. Article ID 1550147717705614. DOI: <https://doi.org/10.1177/1550147717705614>.
31. Ho D.-T., Grötli E.I., Johansen T.A. Heuristic algorithm and cooperative relay. *IC CMT*. 2013. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/ComManTel.2013.6482418>.
32. Rahman S.U., Cho Y.-Z. UAV positioning for throughput maximization. *EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking*. 2018. Article 72. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13638-018-1038-0>.

Стаття надійшла до редакції 23.04.2026 / прийнята до друку 13.08.2026